Énergétique du point matériel

Puissance

Définition : Puissance

On définit la ***puissance d'une force*** $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F})$ exercée par une force $\vec{F}$ sur un point matériel situé en M animé d'une vitesse $\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M)$ dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{v_{\mathcal{R}}}(M).$$

Travail élémentaire

Définition : Travail élémentaire

On définit le travail ***élémentaire***, noté $\delta W_{\mathcal{R}}(\vec{F})$, fourni par une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point matériel pendant un intervalle de temps infinitésimal $\mathrm{d}t$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ par :

$$\delta W_{\mathcal{R}}(\vec{F}) = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F})\,\mathrm{d}t.$$

Travail sur un déplacement fini

Définition : Travail d'une force au cours d'un déplacement fini

Pour un déplacement ***fini*** d'une position M_1 à une position M_2 le long d'une courbe $\mathscr{C}$, le travail total est :

$$\underset{M_1 \xrightarrow[\mathscr{C}]{} M_2}{W}(\vec{F}) = \int_{M_1 \xrightarrow[\mathscr{C}]{} M_2} \delta W(\vec{F}) = \int_{M_1 \xrightarrow[\mathscr{C}]{} M_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

Caractère moteur ou résistant de l'action d'une force

Définition : Caractère moteur ou résistant de l'action d'une force

L'action d'une force est dite ***motrice*** (resp. ***résistive***) quand la puissance de la force est ***positive*** (resp. ***négative***), c'est-à-dire quand l'angle entre la force et la vitesse est ***aigu*** (resp. ***obtus***). La puissance est nulle quand la force est ***orthogonale*** à la vitesse.

Expressions et cas particuliers

Travail élémentaire

Coordonnées cartésiennes $\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{M} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$

Coordonnées cylindriques $\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{M} = F_r\mathrm{d}r + F_\theta r\mathrm{d}\theta + F_z\mathrm{d}z$

Coordonnées sphériques $\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{M} = F_r\mathrm{d}r + F_\theta r\mathrm{d}\theta + F_\varphi r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$

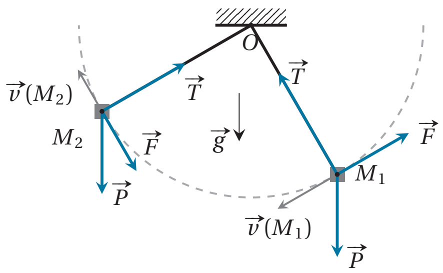
Champ de force $\vec{F}$ uniforme

$$W(\vec{F})_{\mathcal{R}} = \int_{M_1 \xrightarrow[\mathscr{C}]{} M_2} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{M} = \vec{F}\cdot\int_{M_1 \xrightarrow[\mathscr{C}]{} M_2} \mathrm{d}\vec{M} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$$

Forces de liaison et de frottement

Puissance et travail des forces de liaison et de frottement

- La puissance, et donc le travail, de la réaction normale $\vec{N}$ d'un support immobile est toujours nulle. C'est également le cas pour la force de tension d'un pendule.
- L'action de la force de frottement $\vec{F}$ exercée par un milieu ou un support immobile est toujours résistive.



Énergie cinétique

Définition : Énergie cinétique
On définit ***l'énergie cinétique*** $\mathscr{E}_{c\mathscr{R}}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$ d'un point matériel M animé dans $\mathscr{R}$ de la vitesse $\overrightarrow{v_{\mathscr{R}}}(M)$ par :

$$\mathscr{E}_{c\mathscr{R}} = \frac{1}{2}m\|\overrightarrow{v_{\mathscr{R}}}(M)\|^2 = \frac{\|\overrightarrow{p_{\mathscr{R}}}(M)\|^2}{2m}$$

Théorème de la puissance cinétique

Théorème : de la puissance cinétique
La dérivée par rapport au temps dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ de l'énergie cinétique d'un point matériel M est égale à la puissance $\mathscr{P}_{\mathscr{R}_g}(\vec{F})$ dans $\mathscr{R}_g$ de la résultante $\vec{F}$ des forces qui lui sont appliquées :

$$\mathscr{P}_{\mathscr{R}_g}(\vec{F}) = \frac{d\mathscr{E}_{c\mathscr{R}_g}}{dt}.$$

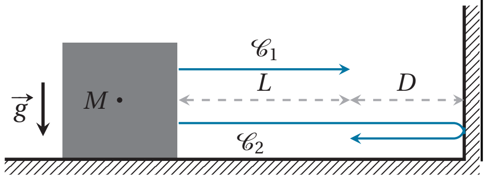
Théorème de l'énergie cinétique

Théorème : de l'énergie cinétique
La variation de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$ d'un point matériel M situé en M_1 à l'instant t_1 et en M_2 à l'instant t_2 est égale au travail de la résultante $\vec{F}$ des forces qui lui sont appliquées le long du trajet $\mathscr{C}$ entre M_1 et M_2 :

$$\underset{t_1\rightarrow t_2}{\Delta}\mathscr{E}_{c\mathscr{R}_g} = \mathscr{E}_{c\mathscr{R}_g}(t_2) - \mathscr{E}_{c\mathscr{R}_g}(t_1) = \int_{M_1 \underset{\mathscr{C}}{\rightarrow} M_2} \vec{F}\cdot d\overrightarrow{OM}.$$

Exercice : Force de frottement solide

On considère un point matériel de masse m glissant sur un plan horizontal, dans le champ de pesanteur uniforme (d'accélération $\vec{g}$), soumis à des forces de frottement solide caractérisé par un coefficient μ.



1. Déterminer les intensités des forces $\vec{R}_\perp$ et $\vec{R}_\parallel$ quand le point matériel glisse.

2. On envisage deux trajets pour le point matériel. Dans le premier, il parcourt la distance L avant de s'immobiliser. Dans le deuxième, il parcourt une distance $L+D$, rebondit sur un mur et repart en sens inverse pour s'immobiliser au même point que dans le premier trajet. Déterminer, pour les deux trajets, les expressions :

   - des travaux du poids et de la réaction normale $\vec{R}_\perp$,
   - du travail de la réaction tangentielle $\vec{R}_\parallel$.

Définition : Force conservative
Une force $\vec{F}$ est dite ***conservative*** si son travail $W_{M_1\rightarrow M_2}(\vec{F})$ sur un point matériel se déplaçant d'un point M_1 à un point M_2 ne dépend pas de la trajectoire suivie de M_1 à M_2 mais uniquement des points extrêmaux M_1 et M_2.

De manière équivalente : $W(\vec{F}) = 0$ sur toute trajectoire fermée.

Énergie potentielle

Définition : Énergie potentielle
On peut associer à la force $\vec{F}$ conservative une énergie potentielle $\mathscr{E}_{pot}(M)$, fonction uniquement de la position M d'un point matériel soumis à $\vec{F}$, définie par :

$$\mathscr{E}_{pot}(M) = -W_{M_0\rightarrow M}(\vec{F}) = -\int_{M_0}^{M}\vec{F}\cdot d\vec{M},$$

où M_0 est un point quelconque. On dit que $\vec{F}$ ***« moins » dérive de l'énergie potentielle*** $\mathscr{E}_{pot}$.

Travail d'une force conservative

Travail d'une force conservative
Le travail d'une force $\overrightarrow{F}$ conservative sur un point matériel se déplaçant de la position M_1 à la position M_2 est alors égal à la ***diminution*** d'énergie potentielle entre M_1 et M_2 :

$$\underset{M_1 \to M_2}{W}(\overrightarrow{F}) = \mathscr{E}_{\text{pot},\overrightarrow{F}}(M_1) - \mathscr{E}_{\text{pot},\overrightarrow{F}}(M_2).$$

Cas d'un système à un degré de liberté

Énergie potentielle pour un mouvement à un degré de liberté
On associe à $\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{e_x}$ une énergie potentielle $\mathscr{E}_{\text{pot}}(x)$ telle que :

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{pot}}}{\mathrm{d}x}.$$

Le travail de $\overrightarrow{F}$ de la position x_1 à la position x_2 est :

$$\underset{x_1 \to x_2}{W}(\overrightarrow{F}) = \mathscr{E}_{\text{pot}}(x_1) - \mathscr{E}_{\text{pot}}(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,\mathrm{d}x.$$

x peut être une cordonnée cartésienne mais aussi un angle en coordonnées polaires

Exemples

Poids

$$\mathscr{E}_{\text{pot}}(M) = mg(z - z_0),$$

avec z l'altitude ($\overrightarrow{e_z}$ de sens opposé à $\overrightarrow{g}$), z_0 est l'altitude où $\mathscr{E}_{\text{pot}}$ est nulle.

Ressort idéal unidimensionnel

$$\mathscr{E}_{\text{pot}}(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2,$$

toujours nulle pour $\ell = \ell_0$ par convention.

Gradient d'un champ scalaire

Définition : Gradient d'un champ scalaire
Soit $M \mapsto E(M)$ un ***champ scalaire***. Son ***gradient***, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E$ est le ***champ vectoriel*** $M \mapsto \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E(M)$ tel que, au voisinage de tout point M :

$$\mathrm{d}E(M) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM}.$$

Orientation du gadient
Le gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,E$ est orthogonal aux surfaces dites « iso-E » définies par $E = \text{cste}$.

Cas d'une force conservative

Dérivation de l'énergie pontentielle
Le champ d'une force conservative $\overrightarrow{F}(M)$ dérive de son énergie potentielle $\mathscr{E}_{\text{pot}}(M)$ selon :

$$\overrightarrow{F}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathscr{E}_{\text{pot}}(M).$$

Cas du poids
Le poids est le gradient de l'énergie potentielle $\mathscr{E}_{\text{pot}} = mgz$. Les surfaces iso-énergétiques sont des plans horizontaux.

Expressions

Expressions du gradient
Les composantes d'une force conservative sont :

coordonnées cartésiennes : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathscr{E}_{\text{pot}}(x,y,z) = -\left(\frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial z}\vec{e_z}\right)$

coordonnées cylindriques : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathscr{E}_{\text{pot}}(r,\theta,z) = -\left(\frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial z}\vec{e_z}\right)$

coordonnées sphériques : $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathscr{E}_{\text{pot}}(r,\theta,\varphi) = -\left(\frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial \mathscr{E}_{\text{pot}}}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}\right)$

Exemples fondamentaux

Énergie potentielle de gravitation
L'énergie potentielle de gravitation entre deux masses ponctuelles M_1, m_1 et M_2, m_2 distantes de r_{12} a pour expression :

$$\mathscr{E}_{\text{pot}_{\text{grav}}} = -\frac{\mathscr{G} m_1 m_2}{r_{12}}.$$

Énergie potentielle élastique
L'énergie potentielle d'interaction entre deux masses distantes de r_{12} reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 a pour expression :

$$\mathscr{E}_{\text{pot}_{\text{élas}}} = \frac{1}{2}k\left(r_{12} - \ell_0\right)^2$$

Exercice

Un point matériel est placé dans un champ de force $\vec{F}$ dérivant de l'énergie potentielle :

$$\mathscr{E}_{\text{pot}} = \frac{\mathscr{E}_{\text{pot}_0}}{\ell^3}\left(x^4 + y^4\right)$$

1. Déterminer l'expression de la force $\vec{F}$. À quelle condition portant sur les constantes $\mathscr{E}_{\text{pot}_0}$ et ℓ sera-t-elle attractive ?
2. Dans ce cas, préciser le vecteur $\vec{F}$ aux points $(\ell;0)$; $(0;-\ell)$ et $(\ell;\ell)$.

Construction

Définition : Énergie mécanique
On définit l'énergie mécanique $\mathscr{E}_{\text{m}\mathscr{R}}$ d'un point matériel situé en M dans un référentiel $\mathscr{R}$, soumis à des forces conservatives auxquelles est associée une énergie potentielle $\mathscr{E}_{\text{pot}}(M)$ par :

$$\mathscr{E}_{\text{m}\mathscr{R}} = \mathscr{E}_{\text{pot}}(M) + \mathscr{E}_{\text{cin}\mathscr{R}}.$$

Théorème

Théorème : de l'énergie mécanique (forme locale)
Dans un référentiel galiléen $\mathscr{R}_g$, la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale au seul travail des forces non conservatives.

En notant $\mathscr{P}_{\text{nc}}$ leur puissance, on a à chaque instant :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\text{m}\mathscr{R}_g}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathscr{R}_g} = \mathscr{P}_{\text{nc}}.$$

Théorème : de l'énergie mécanique (forme globale)
En notant $\underset{M_1 \underset{\mathscr{C}}{\to} M_2}{W_{\text{nc}}}$ le travail total de ces forces non conservatives entre un instant où le point matériel est en M_1, animé dans $\mathscr{R}_g$ d'une vitesse de norme v_1, et un autre instant où il est en M_2 animé d'une vitesse de norme v_2, on a :

$$\Delta\mathscr{E}_{\text{m}\mathscr{R}_g} = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + \mathscr{E}_{\text{pot}}(M_2)\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \mathscr{E}_{\text{pot}}(M_1)\right) = \underset{M_1 \underset{\mathscr{C}}{\to} M_2}{W_{\text{nc}}}.$$

Système conservatif

Définition : Système conservatif
Un système dont l'énergie mécanique se conserve est dit ***conservatif***. Pour un tel système l'équation :

$$\mathscr{E}_{\mathrm{m}} = cste = \mathscr{E}_{\mathrm{m}0}$$

est nommée ***intégrale première du mouvement***.

Vitesse pour un système conservatif
Pour un système conservatif, la vitesse du point matériel s'exprime en fonction de sa position selon :

$$v^2 = \frac{2}{m}\left(\mathscr{E}_{\mathrm{m}0} - \mathscr{E}_{\mathrm{pot}}(M)\right)$$

Influence de forces de frottement

Effet des frottements sur l'énergie mécanique
Quand les seules forces non conservatives auxquelles il est soumis sont de frottement, l'énergie mécanique ne peut que diminuer :

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} \leqslant 0. \tag{1}$$

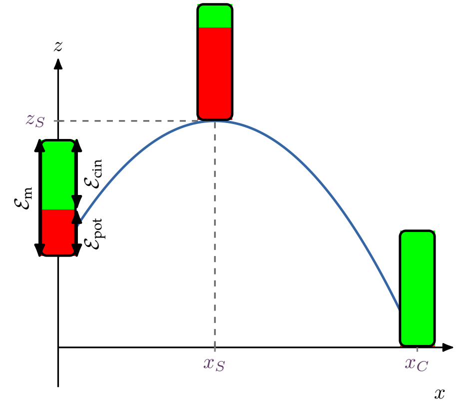
Interprétation de l'énergie potentielle

Interprétation de l'énergie potentielle
- Pour un système conservatif :

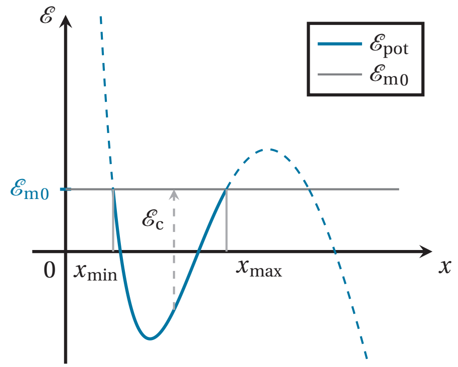
$$\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{cin}} = -\mathrm{d}\mathscr{E}_{\mathrm{pot}}.$$

- Une diminution de $\mathscr{E}_{\mathrm{cin}}$ permet d'emmagasiner de l'énergie potentielle qui pourra être restituée sous forme cinétique.

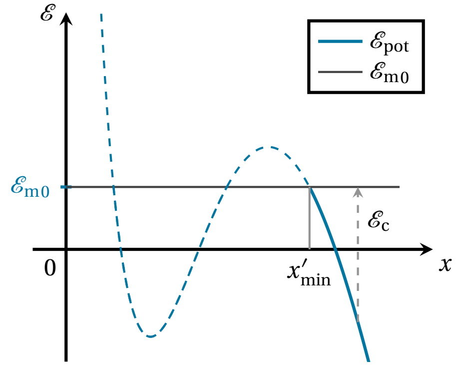
Exemples :



- m lancée vers le haut : v^2 diminue et $\mathscr{E}_{\mathrm{pot}} = mgz$ augmente.
- à la redescente, $\mathscr{E}_{\mathrm{pot}}$ diminue et v^2 augmente.



mouvement entre x_{min} et x_{max}



mouvement au delà de x'_{min}

États liés et de diffusion

Définition : États liés et de diffusion
Un système conservatif est dit :

- dans un état ***lié*** si le mouvement est contraint dans une région finie de l'espace,
- dans un état ***de diffusion*** si le mouvement peut s'étendre jusqu'à l'infini.

Positions d'équilibre

Caractérisation

Les positions dites ***d'équilibre*** où un point matériel soumis à la force conservative $\vec{F}$ dans $\mathcal{R}_g$ galiléen peut être en équilibre sont les points M_{eq} tels que $\vec{F} = \vec{0}$.

Une position M_{eq} d'équilibre est dite :

stable si la force qui s'exerce sur un P.M. proche de M_{eq} tend à le ramener vers M_{eq},

instable sinon.

Mouvement à un degré de liberté

L'énergie potentielle présente une tangente horizontale en un point d'équilibre :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_{pot}(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{M_{eq}} = 0$$

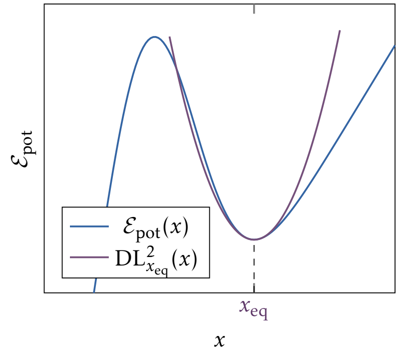
Le point M_{eq} d'abscisse x_{eq} est une position d'équilibre stable si et seulement si :

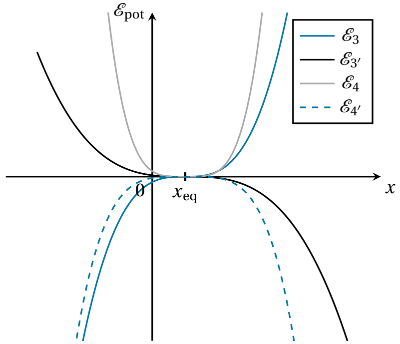
$\mathscr{E}_{pot}(x)$ localement ***minimale*** enx_{eq}

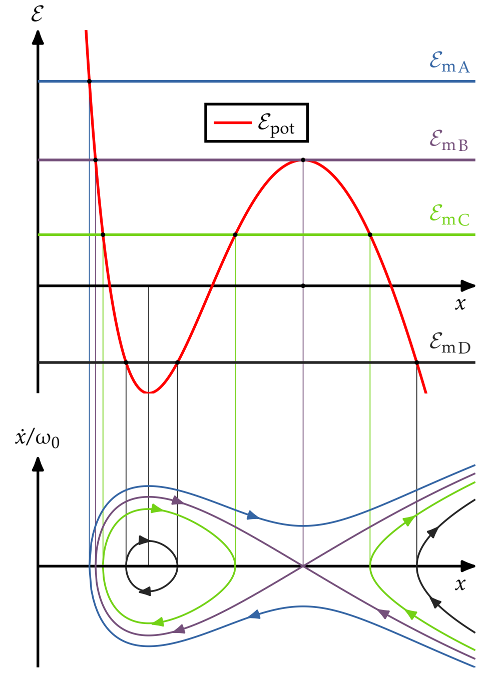
Si $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_{pot}(x_{eq})}{\mathrm{d}x^2} \neq 0$, cette condition correspond à :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_{pot}(x)}{\mathrm{d}x^2}_{x_{eq}} > 0.$$

Modèle fondamental/Oscillations anharmoniques







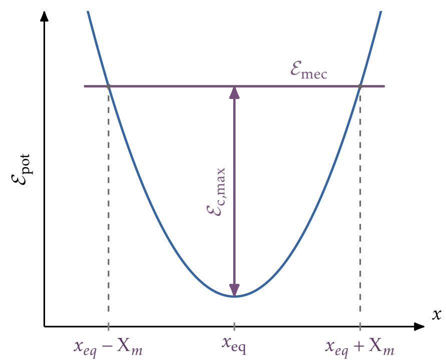
Approximation harmonique

Voisinage d'une position d'équilibre stable

Le mouvement d'un point matériel de masse m au voisinage d'une position d'équilibre stable en $x = x_{\text{eq}}$ est ***harmonique*** de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2\mathscr{E}_{\text{pot}}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_{\text{eq}}} / m}$.

L'***amplitude*** des oscillations, notée X_m, et le ***maximum du module*** de la vitesse atteinte, noté v_m vérifient : $\omega_0 X_m = v_m$.

La trajectoire dans l'espace des phases est une ellipse parcourue dans le sens horaire.



Réversibilité

Définition : Système réversible

Un système mécanique est dit ***réversible*** si pour tout mouvement $(t, \overrightarrow{OM}(t), \vec{v}(t))$ vérifiant les équations du mouvement, le mouvement dit ***renversé***,

- paramétré par t' tel que $\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = -1$,
- avec $(\overrightarrow{OM}_{\text{renv}}(t') = \overrightarrow{OM}(t), \vec{v}_{\text{renv}}(t') = -\vec{v}(t))$

vérifie également les équations du mouvement.

Théorème

Un système conservatif est réversible.

Indispensable

Indispensable

- travail et puissance : définition, théorèmes
- poids et ressort : énergies potentielles
- définition du gradient, cas des forces conservatives
- exemples fondamentaux d'énergie mécanique
- espace des phases : points de rebroussement, barrières et puits de potentiel.